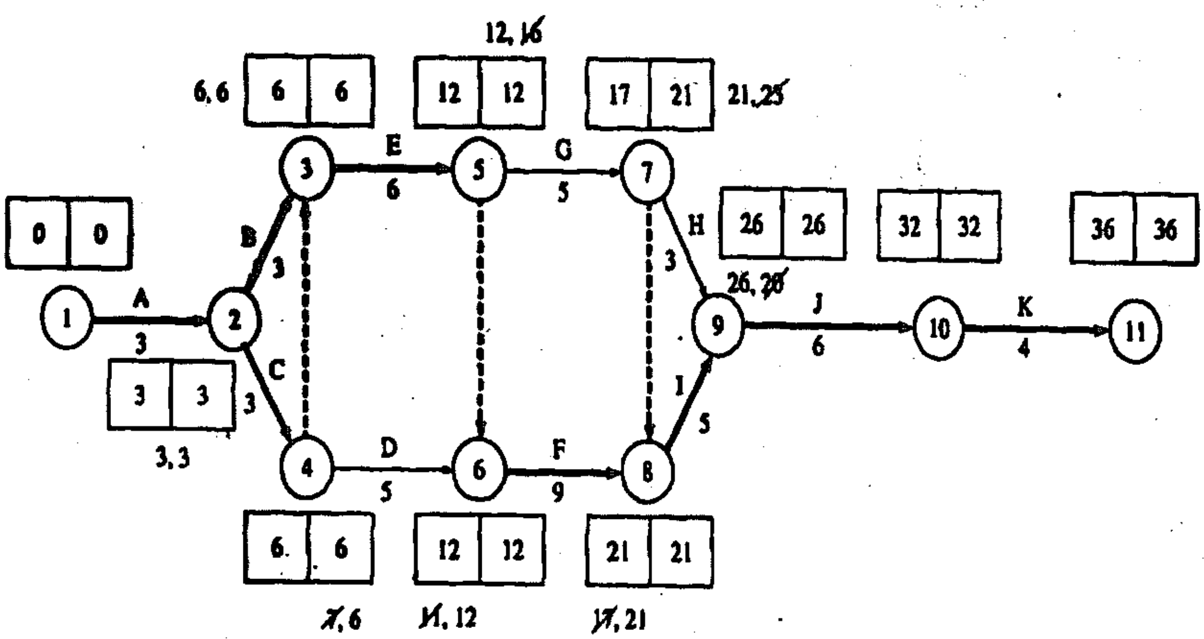
A Fábrica ABC necessita de uma nova instalação fabril. Na lista seguinte são apresentadas as actividades a levar a cabo no projecto e construção dessa nova instalação fabril, as suas precedências e respectivas durações.

Actividade	Descrição	Precedência (s) imediata(s)	Duração (u.t.)
A	Definição do problema	—	3
B	Estudo preliminar de custos e restrições	A	3
C	Análise de problemas no edifício actual	A	3
D	Incorporação de requisitos no novo edifício	C	5
E	Projecto detalhado do novo edifício	B, C	6
F	Construção de um protótipo pelo empreiteiro	D, E	9
G	Análise de custos	E	5
H	Revisão da adequabilidade pelos engenheiros	G	3
I	Construção da fábrica pelo empreiteiro	G, F	5
J	Vistoria ao edifício	I, H	6
K	Montagem final da fábrica	J	4

(*a*) Construa uma rede CPM para este projecto.
(*b*) Identifique o caminho crítico.
(*c*) Calcule a folga total e a folga livre das actividades.

Resolução :

a. Rede CPM



b. Caminhos críticos

Os caminhos críticos são A, B, E, F, I, J, K e A, C, E, F, I, J, K.

c. Folga Livre e Folga Total

Actividade (i, j)	Duração $D_{i,j}$	TMC_i	TMT_j	TMC_j	Folga total $FT_{i,j} = TMT_j - TMC_i - D_{i,j}$	Crítica?	Folga livre $FL_{i,j} = TMC_j - TMC_i - D_{i,j}$
A (1, 2)	3	0	3	3	3 − 0 − 3 = 0	Sim	3 − 0 − 3 = 0
B (2, 3)	3	3	6	6	6 − 3 − 3 = 0	Sim	6 − 3 − 3 = 0
C (2, 4)	3	3	6	6	6 − 3 − 3 = 0	Sim	6 − 3 − 3 = 0
D (4, 6)	5	6	12	12	12 − 6 − 5 = 1	—	12 − 6 − 5 = 1
E (3, 5)	6	6	12	12	12 − 6 − 6 = 0	Sim	12 − 6 − 6 = 0
F (6, 8)	9	12	21	21	21 − 12 − 9 = 0	Sim	21 − 12 − 9 = 0
G (5, 7)	5	12	21	17	21 − 12 − 5 = 4	—	17 − 12 − 5 = 0
H (7, 9)	3	17	26	26	26 − 17 − 3 = 6	—	26 − 17 − 3 = 6
I (8, 9)	5	21	26	26	26 − 21 − 5 = 0	Sim	26 − 21 − 5 = 0
J (9,10)	6	26	32	32	32 − 26 − 6 = 0	Sim	32 − 26 − 6 = 0
K (10,11)	4	32	36	36	36 − 32 − 4 = 0	Sim	36 − 32 − 4 = 0

II

Relativamente a um projecto industrial dispomos dos seguintes dados:

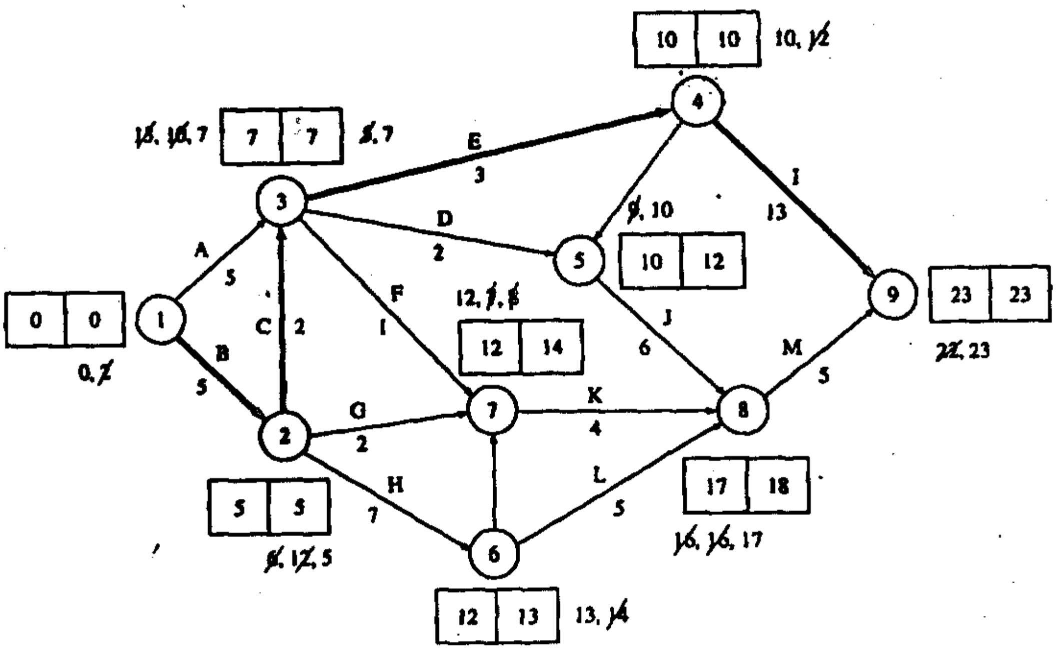
Actividade	Precedência(s) imediata(s)	Duração (semanas)
A	—	5
B	—	5
C	B	2
D	A, C	2
E	A, C	3
F	A, C	1
G	B	2
H	B	7
I	E	13
J	E, D	6
K	F, G, H	4
L	H	5
M	J, K, L	5

I e M são actividades terminais do projecto

(*a*) Construa a rede do projecto e determine o caminho crítico.

(*b*) Calcule a folga total e a folga livre das actividades.

(*a*)



O caminho crítico é B, C, E, I.

Actividade (i, j)	Duração $D_{i,j}$	TMC_i	TMT_j	TMC_j	Folga total $FT_{i,j} = TMT_j - TMC_i - D_{i,j}$	Crítica?	Folga livre $FL_{i,j} = TMC_j - TMC_i - D_{i,j}$
A (1, 3)	5	0	7	7	7 − 0 − 5 = 2	—	7 − 0 − 5 = 2
B (1, 2)	5	0	5	5	5 − 0 − 5 = 0	Sim	5 − 0 − 5 = 0
C (2, 3)	2	5	7	7	7 − 5 − 2 = 0	Sim	7 − 5 − 2 = 0
D (3, 5)	2	7	12	10	12 − 7 − 2 = 3	—	10 − 7 − 2 = 1
E (3, 4)	3	7	10	10	10 − 7 − 3 = 0	Sim	10 − 7 − 3 = 0
F (3, 7)	1	7	14	12	14 − 7 − 1 = 6	—	12 − 7 − 1 = 4
G (2, 7)	2	5	14	12	14 − 5 − 2 = 7	—	12 − 5 − 2 = 5
H (2, 6)	7	5	13	12	13 − 5 − 7 = 1	—	12 − 5 − 7 = 0
I (4, 9)	13	10	23	23	23 − 10 − 13 = 0	Sim	23 − 10 − 13 = 0
J (5, 8)	6	10	18	17	18 − 10 − 6 = 2	—	17 − 10 − 6 = 1
K (7, 8)	4	12	18	17	18 − 12 − 4 = 2	—	17 − 12 − 4 = 1
L (6, 8)	5	12	18	17	18 − 12 − 5 = 1	—	17 − 12 − 5 = 0
M (8, 9)	5	17	23	23	23 − 17 − 5 = 1	—	23 − 17 − 5 = 1

Construa a rede de projecto PERT a partir das informações seguintes:

Actividade	Precedência(s) imediata(s)	Estimativa de duração (semanas) Optimista (a)	Mais provável (m)	Pessimista (b)
A	—	7	16	28
B	A	4	19	25
C	A	10	16	37
D	B	7	13	37
E	B, C	13	19	33
F	B	19	22	33
G	D, E	4	7	19
H	F, G	13	19	49
I	B, C	13	25	37
J	I, H	7	13	19

(a) Identifique o caminho crítico.

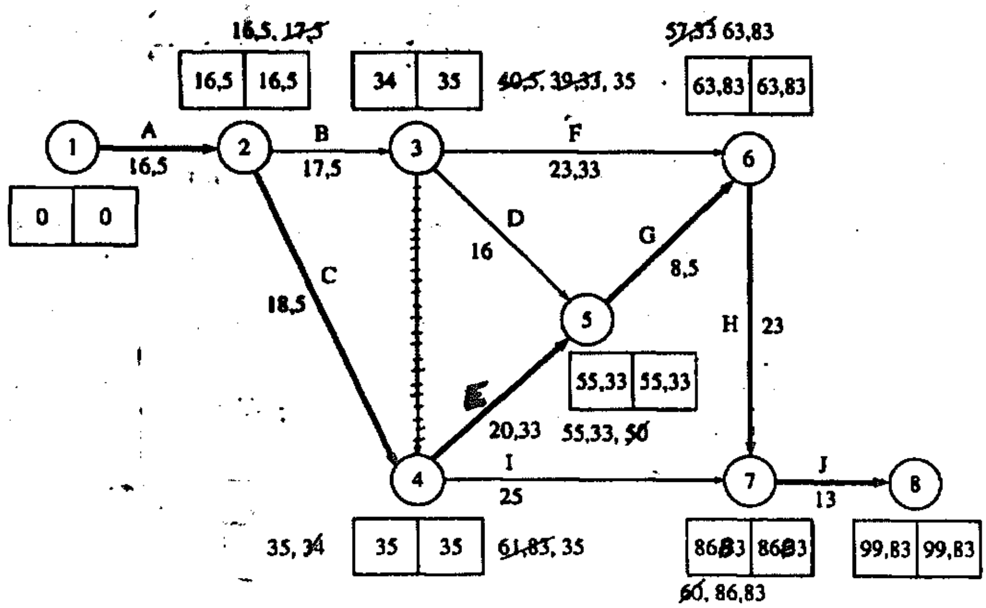
(b) Determine a probabilidade de o projecto estar terminado antes de 2 anos (104 semanas).

$E(D_{ij}) = \frac{a+4m+b}{6}$

$\sigma^2_{D_{ij}} \left(\frac{b-a}{6}\right)$

(a)

Actividade (i, j)	Duração (semanas) Valor médio $E(D_{i,j})$	Variância $\sigma^2_{i,j}$
A (1, 2)	16,50	12,25
B (2, 3)	17,50	12,25
C (2, 4)	18,50	20,25
D (3, 5)	16,00	25,00
E (4,5)	20,33	11,11
F (3, 6)	23,33	5,44
G (5, 6)	8,50	6,25
H (6, 7)	23,00	36,00
I (4, 7)	25,00	16,00
J (7 ,8)	13,00	4,00



O caminho crítico é A, C, E, G, H, J.

(*b*) Probabilidade de se terminar o projecto antes de 2 anos ($T \leq 104$ semanas):

$$k = 104$$

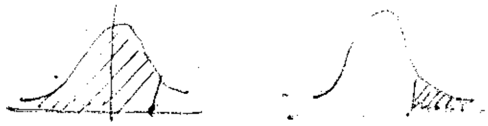
$$E(T) = 99{,}83$$

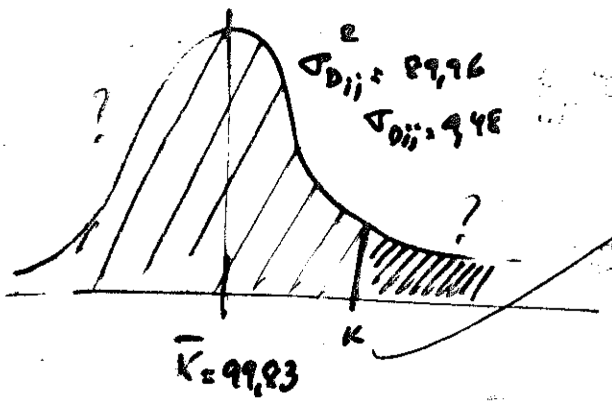
$$\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_C^2 + \sigma_E^2 + \sigma_G^2 + \sigma_H^2 + \sigma_I^2 = 12{,}25 + 20{,}25 + 11{,}11 + 6{,}25 + 36 + 4 = 89{,}96$$

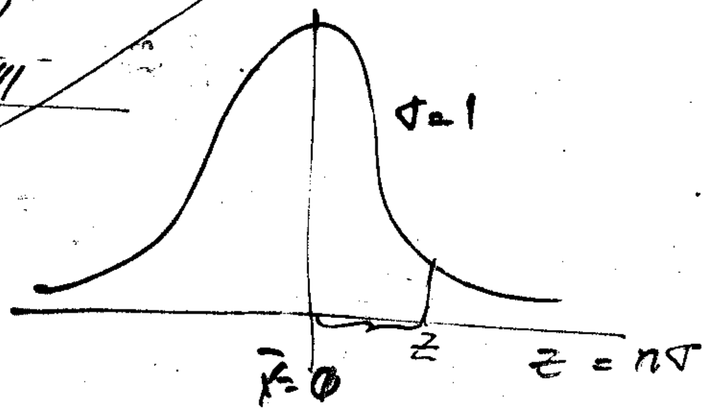
$$\sigma = \sqrt{89{,}96} = 9{,}48$$

$$c = \frac{k - E(T)}{\sigma} = \frac{104 - 99{,}83}{9{,}48} = 0{,}44$$

$P(T \leq \cancel{33}) = P(Z \leq c) = P(Z \leq 0{,}44) = 0{,}67$ (da tabela da distribuição Normal Reduzida).



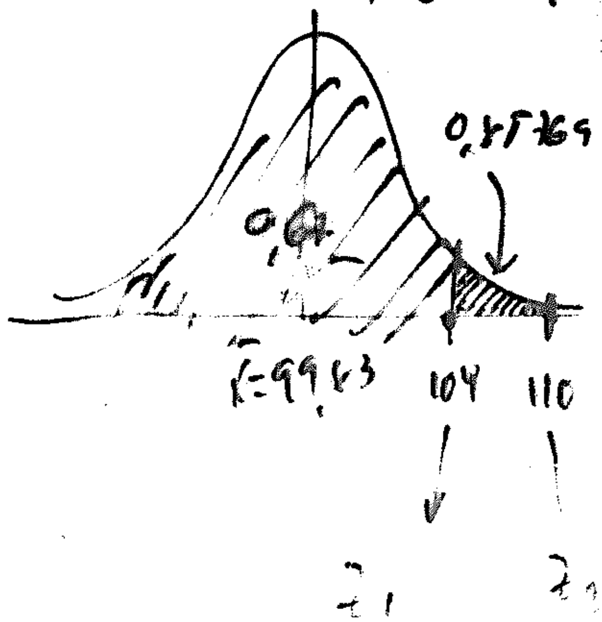




$$z = \frac{K - \bar{X}}{\sigma} = \frac{104 - 99{,}83}{9{,}48} = 0{,}44$$

?

$P(Z < 0{,}44) =$



,85769

$0{,}85769 - 0{,}67 =$

$\approx 0{,}2$

A construção de uma pequena ponte corresponde ao projecto que envolve 10 actividades principais. A info mação relativa às estimativas de duração (em semanas) são indicadas em seguida:

Actividade	Optimista (a)	Mais provável (m)	Pessimista (b)	Precedências
A	2	5	8	—
B	4	7	10	A
C	4	9	14	A
D	6	10	20	B
E	1	3	5	C
F	3	6	9	C
G	4	5	12	D, F
H	6	8	10	E

(a) Construa uma rede PERT para este projecto.

(b) Determine o caminho crítico.

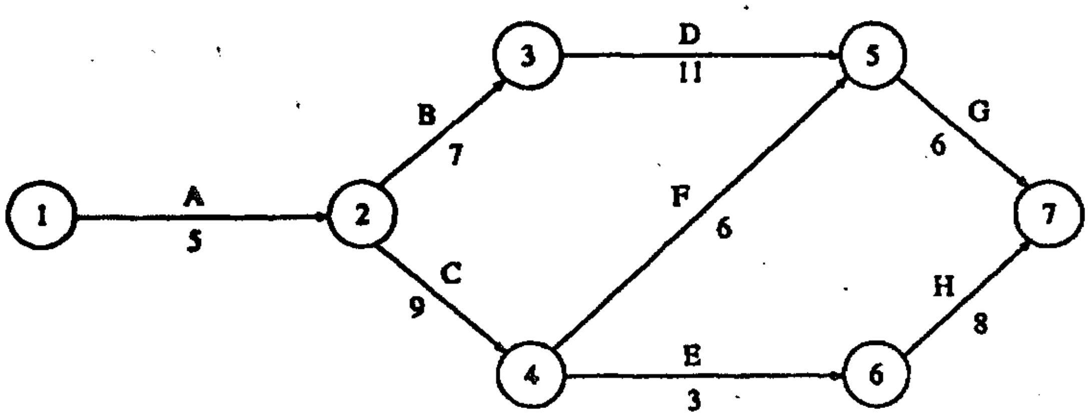
(c) Calcule a probabilidade de se terminar o projecto em 36 semanas.

(a)

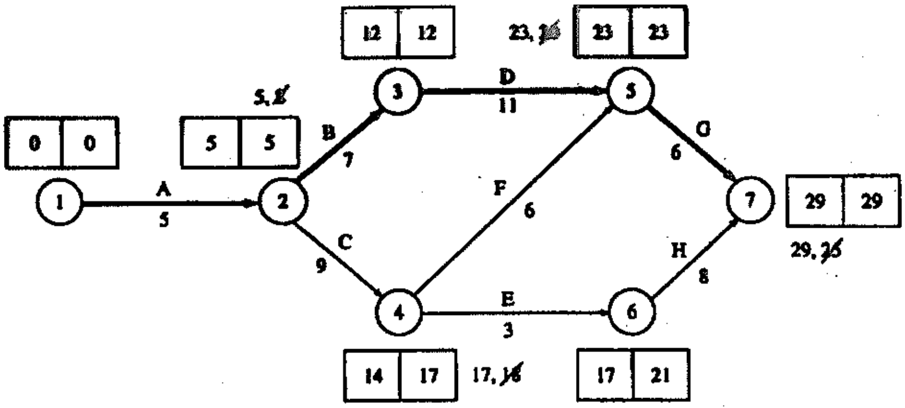
$$E(D_{ij}) = \frac{a+4m+b}{6}$$

$$\sigma^2_{ij} = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

Actividade (i, j)	Duração (semanas) Valor médio $E(D_{i,j})$	Variância $\sigma^2_{i,j}$
A (1, 2)	5	1,00
B (2, 3)	7	1,00
C (2, 4)	9	2,78
D (3, 5)	11	5,44
E (4, 6)	3	0,44
F (4, 5)	6	1,00
G (5, 7)	6	1,78
H (6, 7)	8	0,44



(*b*)



O caminho crítico é A, B, D, G.

(*c*) **Probabilidade de se terminar o projecto antes de 36 semanas:**

$$k = 36$$
$$E(T) = 29$$
$$\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_D^2 + \sigma_G^2 = 1 + 1 + 5{,}44 + 1{,}78 = 9{,}22$$
$$\sigma = \sqrt{9{,}22} = 3{,}04$$
$$c = \frac{k - E(T)}{\sigma} = \frac{36 - 29}{3{,}04} = 2{,}30$$

$P(T \leq 36) = P(Z \leq c) = P(Z \leq 2{,}30) = 0{,}9893$ **(da tabela da Distribuição Normal Reduzida).**

d. $P(k > 36)$

$P(k > 36) = P(Z \geq 2{,}3) = 1 - 0{,}9893 \simeq 0{,}0107$

e. $P(37 < k < 39)$

$P(k > 37) = P(Z_1 > 2{,}63) \simeq$ [illegible] $\qquad Z_1 = \frac{37 - 29}{3{,}04} = 2{,}63$

$P(k < 39) = P(Z_2 < 3{,}29) \simeq$ [illegible] $\qquad Z_2 = \frac{39 - 29}{3{,}04} = 3{,}29$

$P(37 < k < 39) = P(2{,}63 < Z < 3{,}29) =$

$= 1$ [illegible] $- 0{,}99$[illegible]

[illegible]

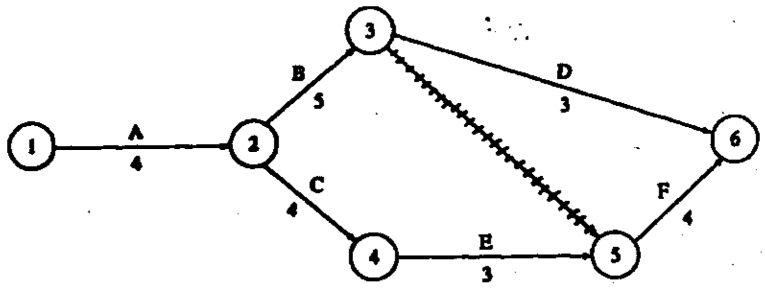
A Companhia de Engenharia da Fusão está a planear um novo produto para a produção de duas ligas metálicas diferentes. A companhia tem um período de tempo e recursos limitados para executar o projecto. Está disponível a seguinte informação:

		Situação "normal"		Situação "crash"	
Actividade	Precedência(s) imediatas	Duração (dias)	Custo (u.m.)	Duração mínima (dias)	Custo unitário de redução (u.m./dia)
A	–	4	400	3	125
B	A	5	800	4	200
C	A	4	520	2	150
D	B	3	600	2	225
E	C	3	255	2	100
F	B, E	4	600	2	175

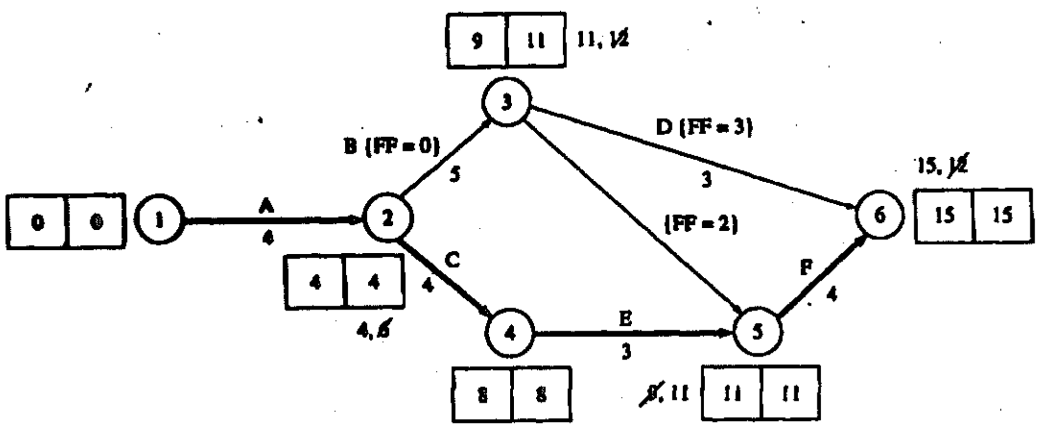
(*a*) Construa a rede do projecto.
(*b*) Determine o caminho crítico.
(*b*) Determine a duração total do projecto e o custo correspondente:

(*c*) Qual é o custo do projecto, se apenas se dispuser de 13 dias para o executar?
(*e*) Assuma que o prazo de execução é de 10 dias. A companhia terá de suportar um custo adicional de 170 u.m. por cada dia de atraso. Determine a redução óptima a efectuar no projecto.

(*a*)



(*b*)



O caminho crítico é A, C, E, F.

(*c*) Duração total do projecto = 15 *dias*

Custo total do projecto = 400 + 800 + 520 + 600 + 255 + 600 = 3175 u.m.

A partir dos dados, poderemos construir a seguinte "Tabela de Reduções":

Actividade (i, j)	Limite máximo de redução $(D - D')$ (dias)	Custo unitário de redução (dado no enunciado) (u.m./dia)
A (1, 2)	$4 - 3 = 1$	125
B (2, 3)	$5 - 4 = 1$	200
C (2, 4)	$4 - 2 = 2$	150
D (3, 6)	$3 - 2 = 1$	225
E (4, 5)	$3 - 2 = 1$	100
F (5, 6)	$4 - 2 = 2$	175

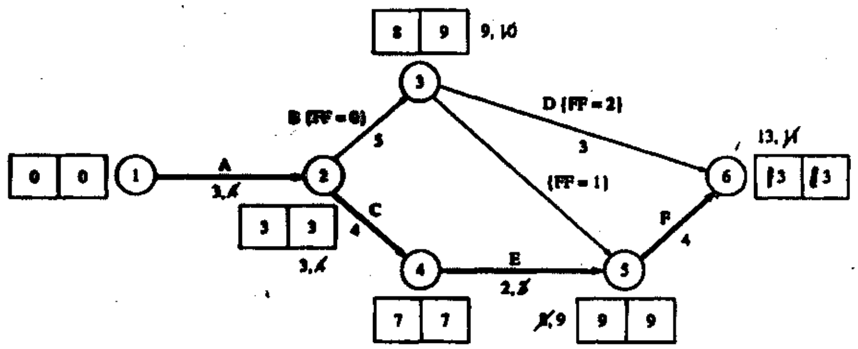
(*d*) Do cálculo do caminho crítico, temos as seguintes informações:

	Actividade (i, j)						
	A(1, 2)	B(2, 3)	C(2, 4)	D(3, 6)	E(4, 5)	F(5, 6)	Fictícia(3, 5)
Crítica?	Sim	—	Sim	—	Sim	Sim	—
Folga livre (*FL*)	—	0	—	3	—	—	2

Dado que a duração total normal do projecto é igual a 15 dias e que apenas se dispõe de 13 dias para o executar, teremos de reduzir uma ou mais actividades críticas de um total de 2 dias. As duas actividades críticas com o menor "Custo unitário de redução", E e A têm (cada uma) limites máximos de redução de 1 dia. Essa redução simultânea traduz-se numa redução efectiva de

Limite de redução = mín{Limite máximo de redução, Limite das *FL* positivas} = mín{2, 2} = 2

Assim, reduziremos cada uma das actividades E e A de um dia.



Do cálculo do caminho crítico, temos as seguintes informações:

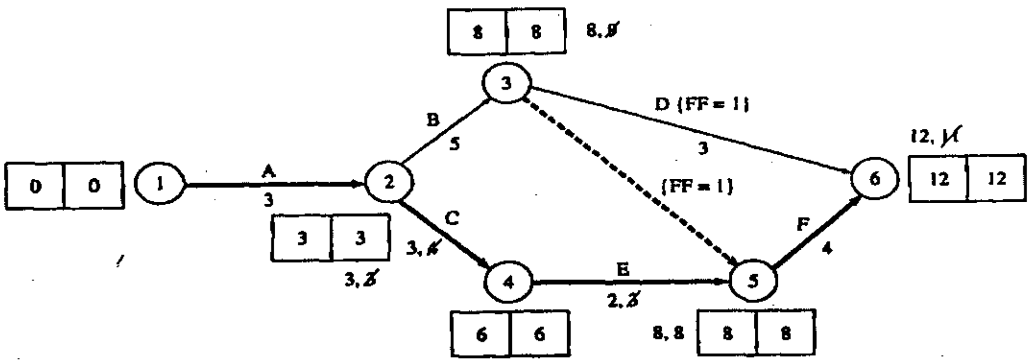
O caminho crítico ainda é A, C, E, F.
Duração total do projecto = 13 dias
Custo total do projecto = 3175 +(1)(100) + (1)(125) = 3400 u.m.

	Actividade (i, j)						
	A(1, 2)	B(2, 3)	C(2, 4)	D(3, 6)	E(4, 5)	F(5, 6)	Fictícia(3, 5)
Crítica?	Sim	—	Sim	—	Sim	Sim	—
Folga livre (*FL*)	—	0	—	2	—	—	1

(*e*) Dado que a duração total do projecto determinada acima é de 13 dias e que o novo prazo de execução é de 10 dias, tentaremos reduzir a duração do projecto de 3 dias. Dado que já esgotámos os limites máximos de redução das actividades E e A, consideraremos agora a actividade C, que é a actividade crítica, onde ainda podemos efectuar reduções, com o custo unitário de redução mais baixo. A redução efectiva da redução da duração da actividade C determina-se do modo seguinte:

Limite de redução = mín{Limite máximo de redução, Limite das *FL* positivas} = mín{2, 1} = 1

Assim, reduzimos a duração da actividade C de 1 dia.



Do cálculo do caminho crítico, temos as seguintes informações:

Há dois caminhos críticos: o antigo A, C, E, F e o novo A, B, F.
Duração total do projecto = 12 dias
Custo total do projecto = 3400 + (1)(150) = 3550 u.m.

	Actividade (*i*, *j*)						
	A(1, 2)	**B(2, 3)**	**C(2, 4)**	**D(3, 6)**	**E(4, 5)**	**F(5, 6)**	**Fictícia(3, 5)**
Crítica?	**Sim**	**Sim**	**Sim**	—	**Sim**	**Sim**	**Sim**
Folga livre (*FL*)	—	—	—	1	—	—	—

De notar que, depois do passo anterior, A e E esgotaram os seus limites máximos de redução, enquanto a duração de C ainda pode ser reduzida de 1 dia. Como há dois caminhos críticos, as possibilidades de redução são as apresentadas em seguida:

	Actividade	
	B, C	**F**
Custo unitário de redução (u.m./dia)	200, 150	200
Redução possível (dias)	1, 1	1

Assim, uma alternativa é reduzir B e C.

Limite de redução = mín{Limite máximo de redução, Limite das *FL* positivas} = mín{1, 1} = 1

Ou seja, poderemos reduzir a duração de B e C de 1 dia, em cada uma, o que se traduz num custo de 200 u.m. (B) e 150 u.m. (C), isto é, de 350 u.m., que é mais elevado do que o custo adicional de 170 u.m. associado ao atraso do projecto além dos 10 dias.
Assim, o passo anterior corresponde à solução óptima do problema:

Duração total do projecto = 12 dias
Custo adicional devido ao atraso = (dias de atraso) × (custo diário de atraso) = (12 − 10) × 170 = 340 u.m.
Custo total do projecto = 3550 + 340 = 3890 u.m.

Um projecto de engenharia electrotécnica é constituído pelas actividades A a D, com as seguintes características:

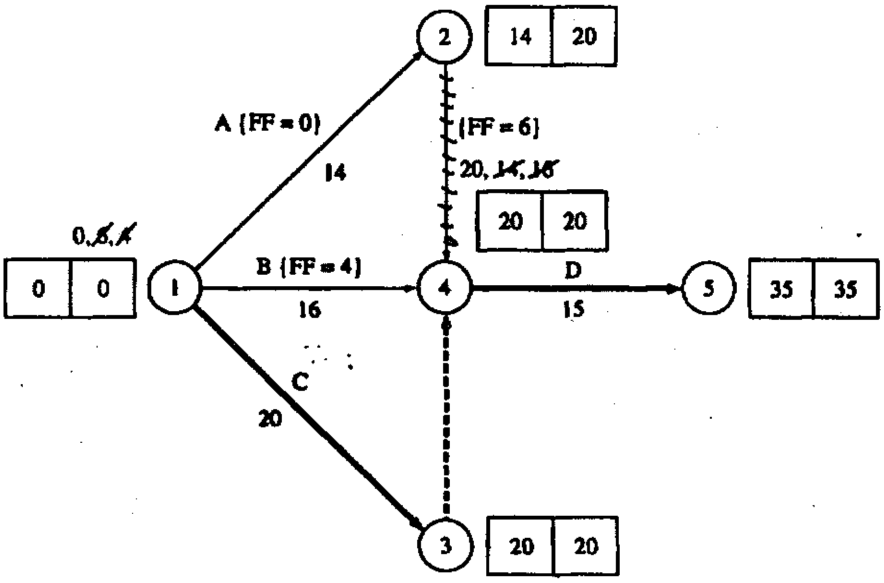
Actividade	Precedência(s) imediatas	Situação "normal" Duração (dias)	Situação "normal" Custo (u.m.)	Situação "urgente" Duração (dias)	Situação "urgente" Custo (u.m.)
A	—	14	1000	10	1400
B	—	16	1200	11	1650
C	—	20	2000	14	2720
D	A, B, C	15	3000	10	4250

(*a*) Construa a rede do projecto e determine os respectivos caminho crítico, custo total e duração total.

(*b*) Se dispuser no máximo de 200 u.m. por dia para suportar um custo adicional de redução, determine a duração óptima e o correspondente custo do projecto.

(*c*) Se o orçamento disponível para este projecto for de 8000 u.m., sem qualquer limite diário, qual a menor duração possível do projecto?

(*a*)



O caminho crítico é C, D.

Duração total do projecto = 35 dias

Custo do projecto = 7200 u.m.

(*b*) A partir dos dados, poderemos construir a seguinte "Tabela de Reduções":

Actividade (i, j)	Limite máximo de redução $(D - D')$ (dias)	Custo unitário de redução $(C' - C)/(D - D')$ (u.m./dia)
A (1, 2)	$14 - 10 = 4$	$(1400 - 1000)/4 = 100$
B (1, 4)	$16 - 11 = 5$	$(1650 - 1200)/5 = 90$
C (1, 3)	$20 - 14 = 6$	$(2720 - 2000)/6 = 120$
D (4, 5)	$15 - 10 = 5$	$(4250 - 3000)/5 = 250$

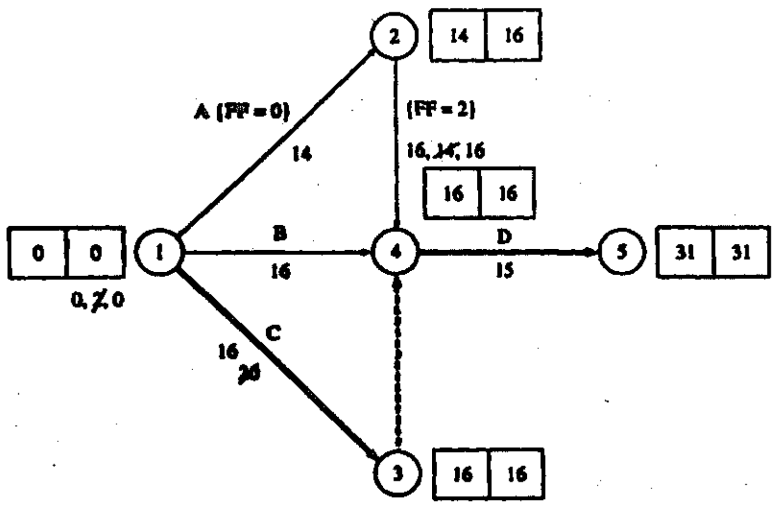
Do cálculo do caminho crítico, temos as seguintes informações:

	Actividade (*i*, *j*)					
	A(1, 2)	B(1, 4)	C(1, 3)	D(4, 5)	Fictícia(2, 4)	Fictícia(3, 4)
Crítica?	—	—	Sim	Sim	—	Sim
Folga livre (*FL*)	0	4	—	—	6	—

Dado que a actividade crítica C tem o menor "custo unitário de redução", torna-se a primeira actividade candidata a redução. De notar que esse custo unitário é de 120 u.m./dia, que é inferior ao limite de 200 u.m./dia disponível para suportar reduções. O valor efectivo da redução da duração de C pode determinar-se do modo seguinte:

Limite de redução = mín{Limite máximo de redução, Limite das *FL* positivas} = mín{6, 4} = 4

Assim, a actividade C deverá ser reduzida de 4 dias.



Do cálculo do caminho crítico, temos as seguintes informações:

Agora há dois caminhos críticos: o antigo C, D e o novo B, D.
Duração total do projecto = 31 dias
Custo do projecto = 7200 + (4)(120) = 7680 u.m.

	Actividade (*i*, *j*)					
	A(1, 2)	B(1, 4)	C(1, 3)	D(4, 5)	Fictícia(2, 4)	Fictícia(3, 4)
Crítica?	—	Sim	Sim	Sim	—	Sim
Folga livre (*FL*)	0	—	—	—	2	—

De notar que, depois de efectuada a redução anterior, a duração da actividade C já só poderá ser reduzida de, no máximo, mais 2 dias. Como temos dois caminhos críticos, as possibilidades de redução são apresentadas em seguida.

	Actividade	
	B, C	D
Custo unitário de redução (u.m./dia)	90, 120	250
Redução possível (dias)	5, 2	5

Assim, uma alternativa é reduzir simultaneamente B e C.

Limite de redução = mín{Limite máximo de redução, Limite das *FL* positivas} = mín{2, 2} = 2

Assim, poderemos reduzir a duração de cada uma das duas actividades B e C de 2 dias. No entanto, o custo unitário de redução, associado à redução simultânea de B (90) e C (120) é igual a 210 u.m./dia, o que excede o limite disponível de 200 u.m./dia.
A outra alternativa é reduzir a duração de D.

Limite de redução = mín{Limite máximo de redução, Limite das *FL* positivas} = mín{5, 2} = 2

Ou seja, poderemos reduzir a duração de D de 2 dias. No entanto, o custo unitário de tal redução é igual a 250 u.m./dia, o que excede o limite disponível de 200 u.m./dia. Assim, o passo anterior corresponde à solução óptima:

Duração total do projecto = 31 dias
Custo do projecto = 7680 u.m.

(*c*)

Alternativa 1a:
Reduzir as durações de B e de C de 2 dias cada.
Duração total do projecto = 29 dias
Custo do projecto = 7680 + (2)(210) = 8100 u.m. > 8000 u.m.
Assim, a Alternativa 1a não é admissível.

Alternativa 1b:
Reduzir as durações de B e de C de 1 dia cada.
Duração total do projecto = 30 dias
Custo do projecto = 7680 + (1)(210) = 7890 u.m. < 8000 u.m.
Assim, a Alternativa 1b é admissível.

Alternativa 2a:
Reduzir a duração de D de 2 dias.
Duração total do projecto = 29 dias
Custo do projecto = 7680 + (2)(250) = 8180 u.m. > 8000 u.m.
Assim, a Alternativa 2a não é admissível.

Alternativa 2b:
Reduzir a duração de D de 1 dia.
Duração total do projecto = 30 dias
Custo do projecto = 7680 + (1)(250) = 7930 u.m. < 8000 u.m.
Assim, a Alternativa 2b é admissível.

Das duas alternativas admissíveis (1b e 2b), a alternativa 1b será a solução óptima.
Os resultados da alínea (*c*) estão sumariados no quadro seguinte:

	Alternativa			
	1a	1b	2a	2b
Reduzir a duração da(s) actividade(s)	B e C	B e C	D	D
Redução a efectuar (dias)	2 dias cada	1 dia cada	2 dias	1 dia
Duração total do projecto (dias)	29	30	29	30
Custo do projecto (u.m.)	7680 + (2)(210) = 8100 > 8000	7680 + (1)(210) = 7890 < 8000	7680 + (2)(250) = 8180 > 8000	7680 + (1)(250) = 7930 < 8000
Solução admissível?	—	Sim	—	Sim
Solução óptima?	—	Sim	—	—